

Adaptive Filterverfahren für die digitale Audiotechnik

Inhaltsverzeichnis

1. Funktion eines adaptiven Filters und die Abgrenzung zum FIR-Filter.....	2
2. Voraussetzung.....	2
3. Anwendung	2
4. Filtertypen.....	2
5. Prinzipieller Aufbau eines AF.....	3
6. Wiener-Filter-Theorie.....	3
7. Anforderungen an das adaptive Filter.....	3
8. Eigenschaften von Adaptionalgorithmen.....	4
9. Klassifikation der Anwendung von AF.....	4
10. Konkretes Beispiel eines adaptiven Filters.....	6
11. Wichtige Eigenschaften der Filter (Resümee).....	6
12. Das Wiener-Filter.....	7
13. Die Wiener-Lösung.....	7
14. Blinde Algorithmen - die Nachfahren des Wiener Filters.....	9
15. LMS-Pseudocode.....	10
16. Konvergenzzeit des Filters.....	11
17. RMS.....	12
18. FLMS.....	12

Teil I – Die Anwendung

1. Funktion eines adaptiven Filters und die Abgrenzung zum FIR-Filter

Bei üblichen FIR-Filtern wird der Filterkoeffizient zur **Laufzeit nicht verändert**. Der Filterkoeffizient ist ein Parameter, der von außen verändert wird, wenn kein Signal anliegt. Bei adaptiven Filtern ist das nicht so. Das adaptive Filter ist **intelligent** und passt sich der Umgebung und deren Änderungen an. Zur Laufzeit werden also die Filterkoeffizienten dynamisch angepasst und das Signal immer anders transformiert. Deswegen spricht man auch oft von intelligenter Signalverarbeitung.

2. Voraussetzung

Vorraussetzung bei einem adaptiven Filter ist der **Adaptionsalgorithmus**. Dieser Algorithmus basiert auf **stochastischen Prozessen**. Diese Prozesse nutzen Matrizen, also die **lineare Algebra** für die Analyse und Aufdatierung der statistischen Werte.

3. Anwendung

Anwendung finden diese Filter in verschiedenen Bereichen der Forschung: Messtechnik, Seismologie, Sonartechnik und Biomedizin. Vor allem aber in der Signalverarbeitung und Telekommunikation.

4. Filtertypen

Das adaptive Filter (im Folgenden nur noch AF) ist immer **nicht-linear**, weil die Summe einzelner gefilterter Frequenzbänder anders ist als das gesamt-gefilterte Signal. Bei AF gilt also das **Superdispositionsprinzip**. Trotzdem wird ein AF als linear und nichtlinear angesehen, abhängig von der Aufgabe und dem Eingangssignal-Typ.

Es gibt zwei unterschiedliche Wege der Adaption, also des Lernprozesses:

- 1) Anhand eines **Soll-Wertes** wird eine **Differenz** zum **Ausgangssignal** des Filters gebildet und diese dann der Adaption übermittelt, die mit diesen Werten das Eingangssignal transformiert. Dies nennt man auch die **überwachte Adaption**.
- 2) Der **Soll-Wert** wird zur **Laufzeit** berechnet und davon dann die neuen Koeffizienten abgeleitet. Hier spricht man von **'blinden' Adaptionsalgorithmen**.

5. Prinzipieller Aufbau eines AF

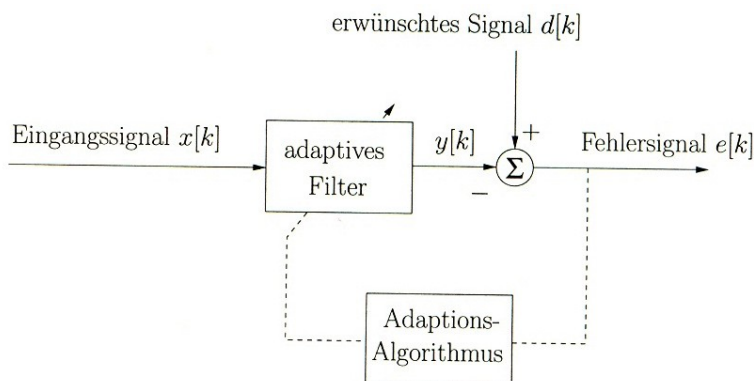


Abbildung 1: Schema eines adaptiven Filters

Die Abbildung zeigt, dass das AF ein **rückgekoppeltes System** ist und das Fehlersignal $e[k]$ für die Rekonfiguration der Filterkoeffizienten nutzt. Das Fehlersignal ergibt sich aus der Differenz von dem gefiltertem Signal $y[k]$ und dem Wunschsignal (d=desired) $d[k]$. Die Variable k ist der Laufzeitindex bei einer Abtastrate T .

In Bezug auf die oben genannten Varianten bedeutet dies:

Das Signal $d[k]$ ist als statistische Referenz vorhanden und muss nicht berechnet werden. Es gibt also ein optimales Signal, das als Referenz dient.

Im zweiten Fall muss dieses Referenzsignal erst ermittelt werden. Hier wird deutlich, dass ein AF ohne stochastische Prozesse nicht auskommen kann, denn das Wunschsignal wird zur Laufzeit über diese sich immer wieder aktualisierende Statistik generiert.

Allgemein gilt aber immer: $e[k] = d[k] - y[k]$

6. Wiener-Filter-Theorie

Die Filterkoeffizienten werden direkt über die **Auto- und Kreuzkorrelationen** des Ausgangssignals des Filters $y[k]$ und des Soll-Signals $d[k]$ ermittelt. Die Korrelationen werden später genauer beschrieben.

Das Wiener Filter ist optimal, wenn der **Mittelwert des quadrierten Fehlersignals (MSE, Mean Squared Error)** der Schätzung minimal wird. Das **Optimalitätskriterium** ist das Hauptziel des Filteralgorithmus.

Das Wiener Filter ist ein optimales lineares Filter bezüglich gegebener Statistik.

7. Anforderungen an das adaptive Filter

Alle Filteralgorithmen **konvergieren** zu dieser **Wiener-Lösung**, weil diese das optimalste Filter ist. Die unterschiedlichen Verfahren der AF haben aber unterschiedliche Konvergenzzeiten in unterschiedlichen Einsatzbereichen.

Ziel ist in erster Linie die Entwicklung eines **linearen Modells** zur Laufzeit.

Dieses Modell beschreibt den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Soll-Signal.

Oftmals ist gar nicht das Ausgangssignal entscheidend für ein gutes Ergebnis sondern die Modellparameter.

8. Eigenschaften von Adaptionalgorithmen

Konvergenzzeit: Die Zeit, die benötigt wird, um den Filterkoeffizienten optimal einzustellen.

Fehleinstellung: Charakterisierung der Genauigkeit eines Algorithmus bezogen auf das erreichbare Optimum.

Tracking: Zeitnahe Reaktion auf Änderungen der Systemumgebung

Rückblick I

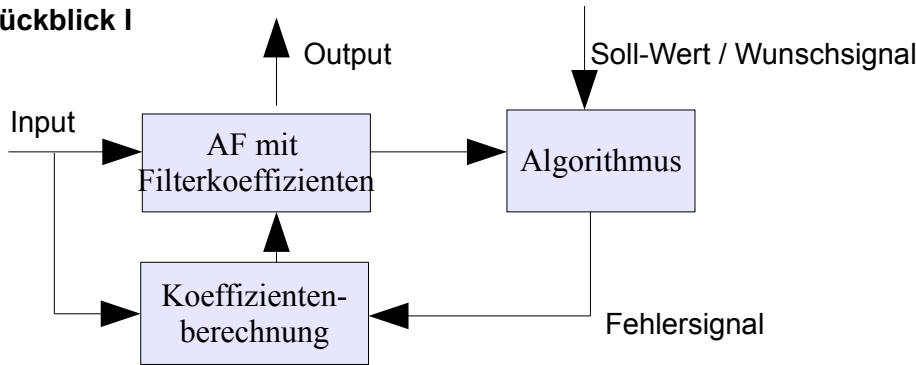


Abbildung 2: Chart 1

9. Klassifikation der Anwendung von AF

Systemidentifikation

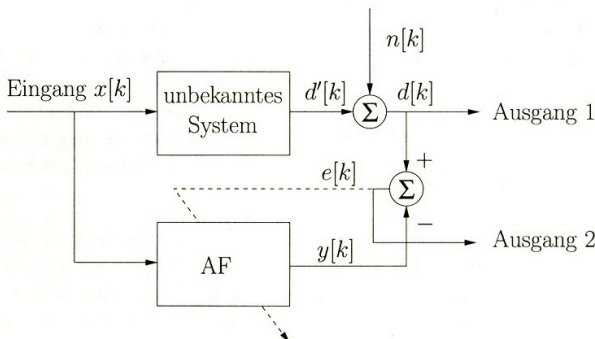


Abbildung 3: Systemidentifikation

Ein unbekanntes System wird über ein AF identifiziert. Hierbei stellt das AF das **nährungsweise lineare Modell** des Systems dar.

Das System und das AF bekommen beide dasselbe **Eingangssignal $x[k]$** . Ist der Ausgang $y[k]$ des Filters identisch mit dem des Systems $d'[k]$, war der Lernprozess erfolgreich und die Unbekannte wurde aufgelöst.

Das eigentliche **Nutzsignal $n[k]$** wird durch das unbekannte System verändert und ergibt $d[k]$. Um nun wieder das brauchbare Signal zu rekonstruieren wird die Summe über $d[k]$ und $y[k]$ gebildet.

Was in der Ursprungsvariante des AF als Fehlersignal galt, ist hier das vom Fehler befreite Nutzsignal.

Typische Anwendung dieses Filters ist die adaptive Echokompensation.

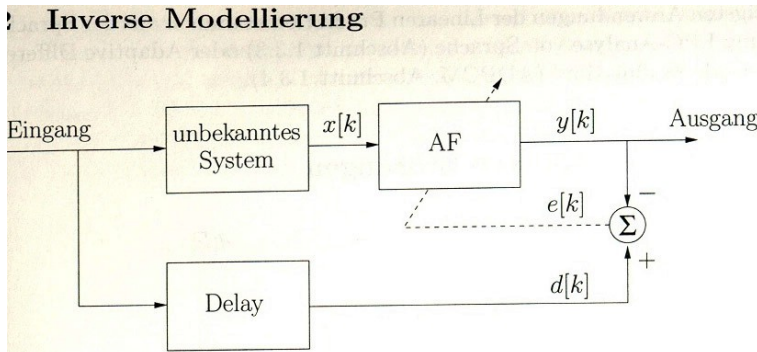


Abbildung 4: Inverse Modellierung

Die inverse Modellierung findet in der Datenentzerrung Anwendung. Die Delay-Zeit entspricht der Laufzeit vom unbekanntem System und dem AF. Das AF passt sich anhand von $e[k] = d[k] - y[k]$ an und stellt darüber seine Filterkoeffizienten ein.

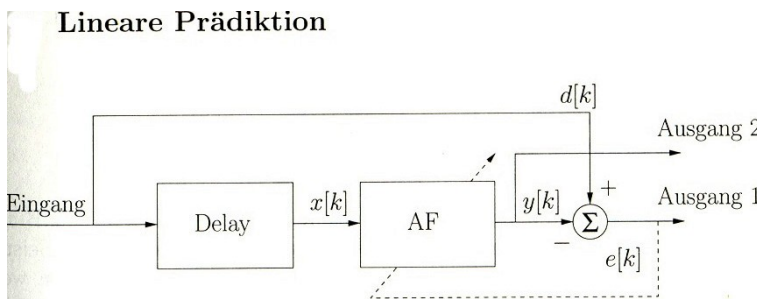


Abbildung 5: Lineare Prädiktion

Bei der LPC gilt es eine Vorhersage über das Signal zu treffen. Durch die Verzögerung wird eine Vorhersage provoziert. Das scheint paradox, weil das $d[k]$ doch vorliegt, aber so wird die Abweichung als $e[k]$ ermittelt.

Elimination von Störungen

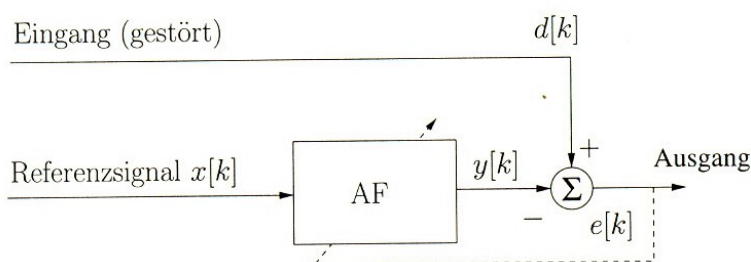


Abbildung 6: Elimination

Im Unterschied zu den Vorgängern wird hier $d[k]$ nicht als Optimum, sondern als Störung angesehen. Wie schon vorher gilt $e[k] = d[k] - y[k]$, aber neben der Koeffizienteneinstellung ist $e[k]$ auch das befreite Signal.

10. Konkretes Beispiel eines adaptiven Filters

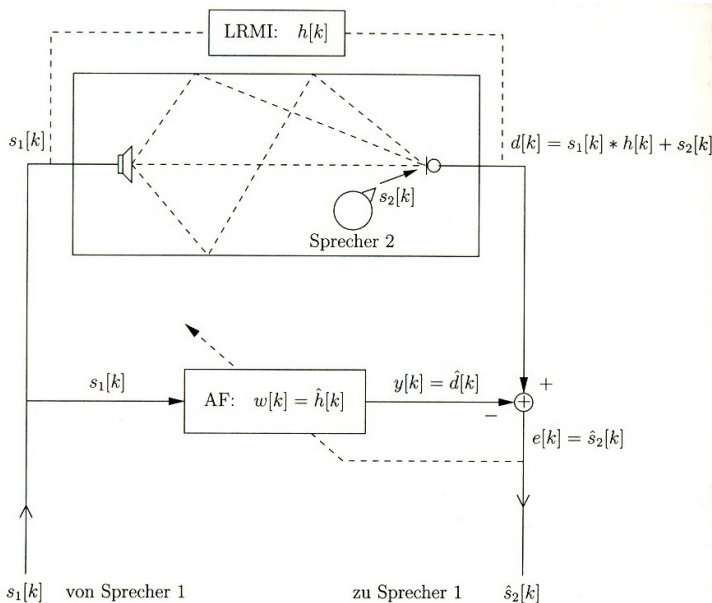


Abbildung 7: LRMI

Gezeigt wird hier schematisch die Kommunikation zwischen zwei Sprechern über eine Auto-Sprechanlage. Das Signal $s_1[k]$ vom Sprecher 1 geht über die Lautsprecher in das Cockpit. Hier wird über ein Mikrophon sowohl das neue Signal $s_2[k]$ von Sprecher 2, als auch $s_1[k]$ an den Sprecher 1 zurückgesendet (sehr verkürzte Beschreibung).

Damit der Sprecher 1 sich nicht ungewollt selbst reden hört (**akustisches Echo**), muss $s_1[k]$ als Störsignal betrachtet und entfernt werden.

Dazu wird $s_1[k]$ an das AF übergeben. Die Übertragungscharakteristik im Auto wird als LRMI, also Lautsprecher-Raum-Mikrophon-Impulsantwort (oder einfach IR des Raumes) $h[k]$ bezeichnet.

Deswegen gilt:

$$d[k] = s_1[k] * h[k] + s_2[k]$$

Ziel des AF ist es, ein Signal zu ermitteln, dass an den Sprecher 1 zurückgeschickt wird und vorher von $s_1[k]$ befreit wird. Also ist $e[k] = \hat{s}_2[k]$. Das Dach über der Variable deutet an, dass das Signal Ergebnis einer Schätzung ist.

Geschätzt wird vor allem die IR, was für das AF der Filterkoeffizient ist und üblicherweise mit $w[k]$ beschrieben wird. Bei AF wird dies auch **Gewicht** genannt und über das $e[k]$ berechnet.

In diesem Fall ist

$$w[k] = \hat{h}[k]$$

und so ist das Ausgangssignal $y[k]$ des AF eine Schätzung des zu eliminierenden Störsignals:

$$y[k] = s_1[k] * \hat{h}[k] = \hat{d}[k]$$

und dann ist ja wohl

$$\hat{s}_2[k] = e[k] = d[k] - \hat{d}[k]$$

11. Wichtige Eigenschaften der Filter (Resümee)

- Dem AF wird neben dem Eingangssignal $x[k]$ ein Wunschsinal $d[k]$ präsentiert, das auf optimale Art geschätzt werden soll.
- Statistik und Filterkoeffizienten sind zu Beginn unbekannt.
- Die Abhängigkeiten des Filter-Systems können sich zeitlich ändern. Das heißt, dass auch die Filterkoeffizienten zeitlich abhängig sind.

Teil II – Die Mathematik

12. Das Wiener-Filter

Das Wiener Filter ist ein AF, dem eine Musterfunktion, also das Wunschsinal, vorliegt. Anhand dieser Funktion werden die Filterkoeffizienten angepasst. Die Erweiterung eines solchen Filters ist die Berchnung dieser Musterfunktion durch statistische Werte. Trotzdem gilt das Wiener Filter als Optimal-Lösung und wird immer wieder bei Wertevergleichen und Anpassungen referenziert.

13. Die Wiener-Lösung

Die optimalen Filterkoeffizienten werden durch Minimierung des **mittleren quadratischen Fehlers** ermittelt. Sie sind eine quadratische Funktion der Filterkoeffizienten und werden als **Fehlerfläche** im mehrdimensionalen Raum abgebildet. Diese Fehlerfläche hat ein Minimum, das einen Satz von optimalen Filterkoeffizienten enthält. Jeder Algorithmus eines AF wandert diese Fehlerfläche zum Minimum herab und konvergiert damit zum Optimum.

Das Ausgangssignal $y[k]$ des AF wird, wie schon erwähnt, über die Gewichte $w[k]$, also den IRs, der Filter berechnet:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{N-1} w_{i+1}[k] x[k-i]$$

Bei N Gewichten und N Werten des Eingangssignals werden die Vektoren

$$\underline{w}[k] = [w_1[k], w_2[k], \dots, w_n[k]]^t$$

$$\underline{x}[k] = [x_1[k], x_2[k-1], \dots, x[k-N+1]]^t$$

berechnet.

Da das alles nach Convolution aussieht, zwei n-lange Sequenzen werden miteinander multipliziert, wird also die **Faltungssumme** als einfaches **Skalarprodukt** beschrieben

$$y[k] = \underline{x}^t[k] \underline{w}[k] = \underline{w}^t[k] \underline{x}[k]$$

Von dem **Fehlersignal** wird die Gütebeurteilung abgeleitet. Der mittlere quadratische Fehler (**MSE**) ist das Mass für die Beurteilung. Da das Signal nicht periodisch ist wird nur der Erwartungswert des mittleren quadratischen Fehlers berechnet. Der Erwartungswert ist das erste Moment eines stochastischen Prozesses.

Aus

$$e[k] = d[k] - y[k]$$

wird, wie oben ermittelt,

$$e[k] = d[k] - \underline{x}^t[k] \underline{w}[k] = d[k] - \underline{w}^t[k] \underline{x}[k]$$

und das quadriert ergibt

$$e^2[k] = d^2[k] + \underline{w}^t[k] \underline{x}[k] \underline{x}^t[k] \underline{w}[k] - 2d[k] \underline{x}^t[k] \underline{w}[k]$$

Nun der Erwartungswert, weil mit statistischen Größen gerechnet wird:

$$E\{e^2[k]\} = E\{d^2[k]\} + \underline{w}^t[k] E\{\underline{x}[k] \underline{x}^t[k]\} \underline{w}[k] - 2E\{d[k] \underline{x}^t[k] \underline{w}[k]\}$$

Eigentlich sind die \underline{w} hier zeitinvariant, aber nur bei der Wiener Lösung.

Mit der Autokorrelationsmatrix (Statistik des Eingangssignals)

$$\mathbf{R} = E\{\underline{x}[k]\underline{x}^T[k]\}$$

und dem Kreuzkorrelationsvektor \underline{p} (gemeinsame Statistik des Wunsch- und Eingangssignals)

$$\underline{p} = E\{d[k]\underline{x}[k]\}$$

wird der MSE zu

$$E\{e^2[k]\} = E\{d^2[k]\} + \underline{w}^T[k] \mathbf{R} \underline{w}[k] - 2\underline{p}^T \underline{w}[k]$$

Die **Fehlerfunktion** in Abhängigkeit des Gewichtsvektors \underline{w} heißt also

$$J(\underline{w}) = E\{e^2[k]\}$$

Ein Filter ist also dann optimal eingestellt, wenn der kleinste MSE erreicht ist. Das bedeutet das Minimum der Fehlerfunktion. Die Fehlerfunktion nimmt im optimalen Filterkoeffizientenvektor, die sog. Wiener-Lösung \underline{w}^o , ihr Minimum J_{\min} an.

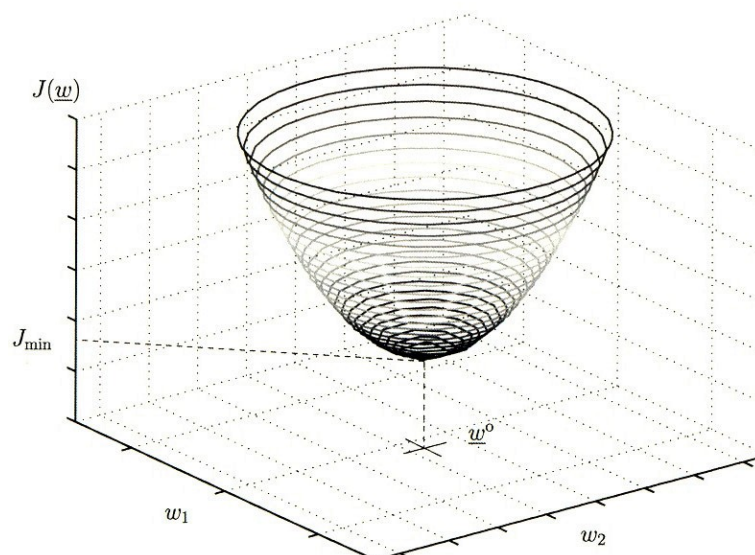


Abbildung 8: Fehlerfläche der Wiener-Lösung

Die Abbildung zeigt die Fehlerfläche eines Wiener-Filters. Dieses Filter hat zwei Filterkoeffizienten w_1 und w_2 (X- und Z-Achse) und ein Optimum am Punkt J_{\min} erreicht. Die Y-Achse zeigt die Fehlerfunktionen.

Autokorrelationsmatrix des Ausgangssignals: die Fehlerfläche wird durch die **Eigenwerte** der Autokorrelationsmatrix bestimmt. Das heißt, dass die Eigenwerte der Matrix einfluß auf den **Adaptionsalgorithmus** und die Filterkoeffizienten nehmen.

Rückblick II

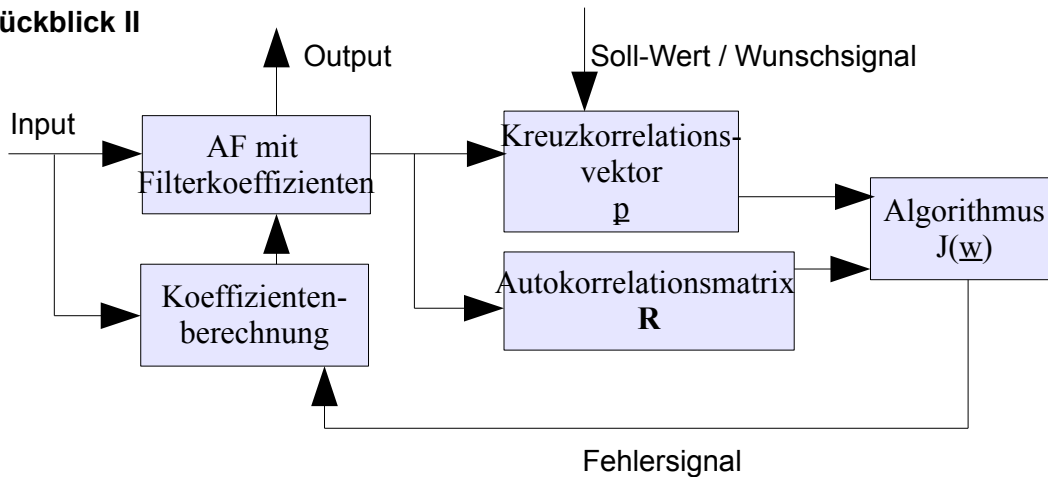


Abbildung 9: Chart 2

14. Blinde Algorithmen - die Nachfahren des Wiener Filters

Bei den folgenden AF liegt das Wunschsignal nicht mehr vor und muss also über statistische Werte selbst generiert werden.

Das Gradienten-Verfahren

Voraussetzung für dieses Verfahren ist, dass es einen **optimalen Koeffizientenvektor \underline{w}^o** gibt. Dieser ist von der Wiener-Lösung abgeleitet.

Um an das Fehlerminimum J_{\min} zu gelangen, wird der Gradient ermittelt, also die Ableitung von $J(\underline{w})$ nach \underline{w} . Je kleiner der Gradient, je näher ist der Koeffizient am Optimum der Wiener Lösung. Die Entwicklung des Gradienten erfolgt iterativ.

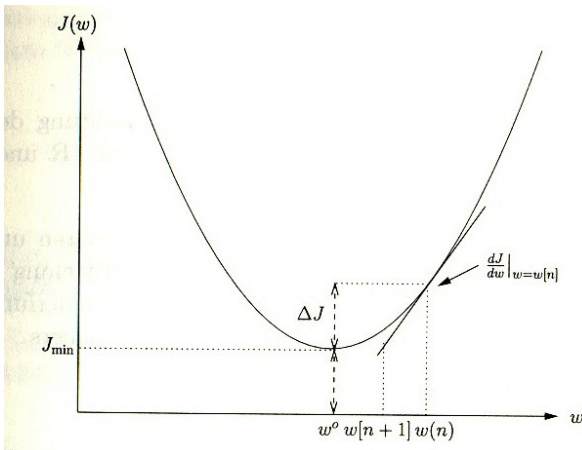


Abbildung 10: Ermittlung des Gradienten

LMS-Algorithmus

Der Least-Mean-Square-Algorithmus, LMS, begnügt sich mit einer Schätzung dieses Gradienten. Bei der Wiener-Lösung wurde die **Fehlerfunktion über die Erwartungswerte** des quadratischen Fehlers ermittelt. Beim LMS wird eine **zeitliche Mittelung des Fehlersignals** vorgenommen und hiervon eine Schätzung vorgenommen:

$$\hat{j}(\underline{w}, l) = \frac{1}{M} \sum_{k=l-M+1}^l e^2[k]$$

M ist die Mittelungslänge und l der veränderte Laufindex k .

Es wird also die Fehlerfunktion über ein bestimmtes Zeitintervall ermittelt und infolgedessen die Schätzung des Gradienten vornehmen:

$$\underline{G}(\underline{w}, l) = \Delta w \{ \hat{j}(\underline{w}, l) \}$$

Die Gradientenrechnung ist der Ersatz des MSE und führt zur Beurteilung des Gütemaßes.

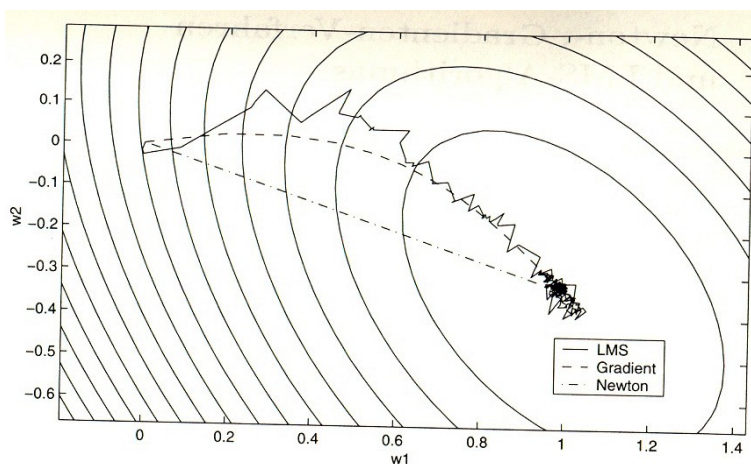


Abbildung 11: Verhalten der bisherigen Adaptionsalgorithmen

15. LMS-Pseudocode

Das Programm für den LMS-Algorithmus könnte wie folgt aussehen:

```

INTI: w[0] = 0; μ > 0 // konstante Schrittweite
//1. Filterausgangswert
y[k]=w[k]x[k]
//2. Fehlerwert
e[k]=d[k]-y[k]
//3. Aufdatierung des Koeffizientenvektors
w[k+1] = w[k] + μe[k]x[k]
```

Rückblick III

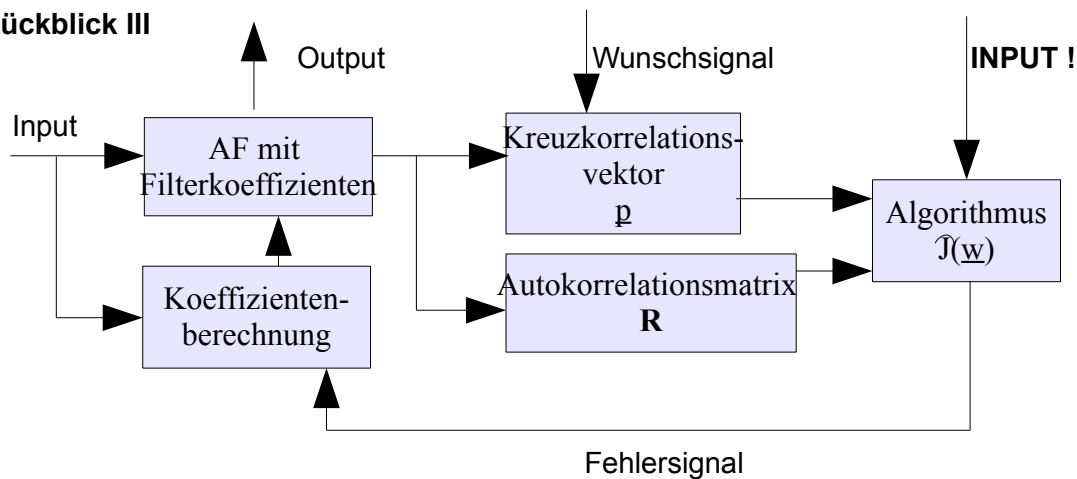


Abbildung 12: Chart 3

Die Schrittweite hat Auswirkung auf die Einstellung des Filters:

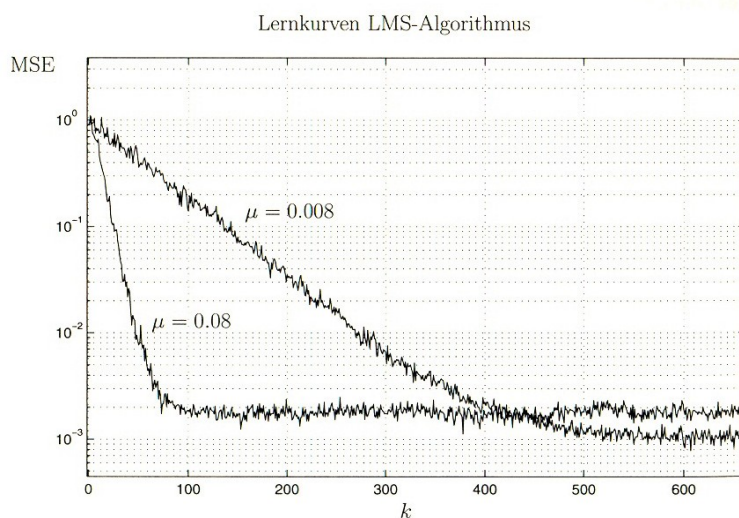


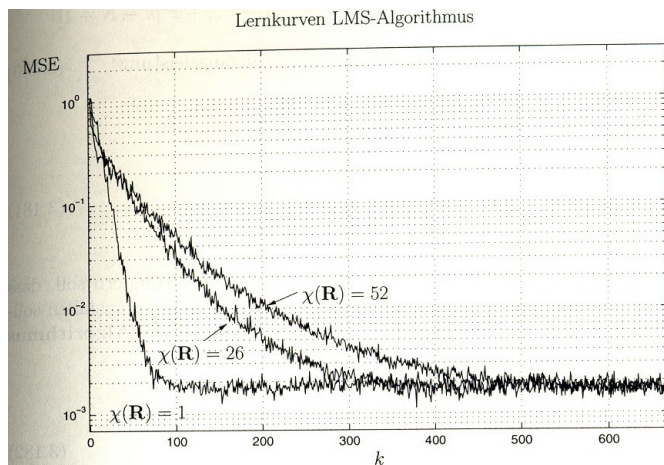
Abbildung 13: Auswirkung der Schrittweite

16. Konvergenzzeit des Filters

Wie schnell ein Filter reagiert hängt von dem Eigenverhältnis der Autokorrelationsmatrix ab.

$$\kappa(\mathbf{R}) = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}$$

Dies ist die Konditionszahl einer Matrix. Bei $\kappa(\mathbf{R}) = 1$ ist ein sehr umfangreiches Spektrum vertreten (weißes Rauschen).



Figur 3.11: LMS-Lernkurven bei verschiedenen Konditionierungen des Eingangssignals
 $\chi(\mathbf{R}) = 1|26|52$; $\mu = 0.08$, $N = 10$

Abbildung 14: Auswirkung der Konditionszahl

17. RLS

Recursive-Least-Square Algorithmus

Dieser Algorithmus ist sehr zeitnah und ermittelt in jedem Schritt den Koeffizientenvektor neu

18. FLMS

Frequency-LeastMean-Square-Algorithmus

Nach einer DFT wird der LMS-Algorithmus in der Frequenzdomäne angewendet. Danach wird das Signal wieder IFFTiert.

Literaturhinweise

Hofbauer, Markus. 2000, **Adaptive Filter**

Berlin, Springer-Verlag

<http://de.wikipedia.org/wiki/Korrelationskoeffizient>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Matrix>

http://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Algebra

http://de.wikipedia.org/wiki/Matrix_%28Mathematik%29

http://www.informatik.fh-wiesbaden.de/~linn/vpdv9900/ortgKorr/kk_why.html

<http://mathworld.wolfram.com/Autocorrelation.html>

<http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>

<http://mathworld.wolfram.com/Cross-CorrelationTheorem.html>

<http://130.191.21.201/multimedia/jiracek/dga/filtering/correlation.html>

<http://lmb.informatik.uni-freiburg.de/lectures/digitale-bv/DBV-II-Kap1+2.pdf>

<http://www.gfai.de/~heinz/publications/NI/KA14.pdf>