Exkurs: Matrix und Vektoren

Matrix

Eine Matrix im Allgemeinen ist eine Tabelle mit Spalten und Zeilen. Die Inhalte der Zellen können zusammenhängen. Somit ergibt sich aus dem Produkt von zwei Vektoren eine Matrix.

$\underline{v}_1 = [a_1, a_2, a_3, a_4]$

$\underline{v}_2 = [x_1, x_2, x_3, x_4]$

Die Variable für eine Matrix ist ein Großbuchstabe.

$$\mathbf{M} = \underline{v}_1 * \underline{v}_2 = \begin{matrix} a_1x_1 & a_2x_1 & a_3x_1 & a_4x_1 \\ a_1x_2 & a_2x_2 & a_3x_2 & a_4x_2 \\ a_1x_3 & a_2x_3 & a_3x_3 & a_4x_3 \\ a_1x_4 & a_2x_4 & a_3x_4 & a_4x_4 \end{matrix}$$

Anders werden in einer Matrix Gleichungen von Unbekannten und der Koeffizienten abgebildet, die in einem linearen Zusammenhang stehen. Der Ursprung der Matrix liegt in der linearen Algebra oder auch Vektoralgebra, die versucht geometrische Objekte zu beschreiben.

In der vorliegenden Matrix ***A*** werden die Koeffizienten abgebildet.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Im Vektor ***x*** stehen die Unbekannten, in ***b*** die 'rechte Seite', also die Ergebnismenge.
Meist wird die Matrix ohne die Unbekannten aufgebaut, nur die Koeffizienten und die Ergebnisse werden zusammengestellt.

Ax=b

Die Inhalte der Matrix und der 'rechten Seite' sind alle bestandteil desselben geometrischen Raumes.
Bei solchen linearen Gleichungssystemen entstehen Regeln:
unterbestimmtes Gleichungssystem: weniger Gleichungen als Unbekannte.
überbestimmtes Gleichungssystem: mehr Gleichungen als Unbekannte.
Das System ist homogen, wenn $b_i = 0$, ansonsten inhomogen.

Diagonalmatrix: Elemente außerhalb der Hauptdiagonale sind 0.

Transponierte Matrix: Matrix wird an der Hauptdiagonale gespiegelt. $A \rightarrow A^T$

Einheitsmatrix:quadratische Matrix, deren Hauptdiagonale nur aus 1 besteht, sonst 0.

Inverse Matrix: $A \cdot A^{-1} = E$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

Eigenwert: Streckungsfaktor des Eigenvektors $f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \lambda$ Lmabda ist der Streckungsfaktor.

Eigenvektor: Ein Vektor, der sich vom Nullvektor unterscheidet.

Vektorräume von Matrizen
Die n x m-Matrizen über einem Körper *K* bilden mit der Matrizenaddition und der Skalarmultiplikation jeweils einen K-Vektorraum. Die Spur des Matrizenprodukts $A^T \cdot B$

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{spur}(A^T B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ij}$$

ist dann ein Skalarprodukt auf dem Matrizenraum.

Als Spur wird die Summe der Elemente der Hauptdiagonale bezeichnet.

Vektor
Liste mit Werten (sehr allgemein beschrieben). Zweidimensionale Vektoren werden als Matrix bezeichnet (Aufbau durch Spalten und Zeilen). Die einzelnen Spalten sind dann Spaltenvektoren.

Zitat aus http://de.wikipedia.org/wiki/Matrix_%28Mathematik%29
Abschnitt Vektor-Vektor-Produkt.
Hat man zwei Spaltenvektoren $\underline{v}$ und $\underline{w}$, dann besteht das Matrixprodukt $v \cdot w$ aus dem ersten $v^T \cdot w$ und zweiten Produkt $v \cdot w^T$.
Das erste Produkt ist eine 1x1-Matrix, die als Zahl interpretiert wird und man nennt sie das **kanonische Skalarprodukt**.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = -1$$

Das zweite Produkt ist eine $n \, X \, n$ -Matrix, die als dyadisches Produkt oder auch **Tensorprodukt** bezeichnet wird.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1\cdot(-2) & 1\cdot(-1) & 1\cdot 1\\2\cdot(-2) & 2\cdot(-1) & 2\cdot 1\\3\cdot(-2) & 3\cdot(-1) & 3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\-4 & -2 & 2\\-6 & -3 & 3\end{pmatrix}$$

Zitat Ende.
Für die Berechnung der Korrelationsmatrizen wird das Tensorprodukt genutzt.